

基于 AI 辅助的量子力学自学过程分析

从零基础到数学物理深度对话

2026.3.22



目录

- ① 项目总览
- ② 学习节奏与时间线
- ③ Prompt 内容分布
- ④ 关键案例
- ⑤ 已掌握内容分析
- ⑥ 总结



项目总览

目标: 通过自己给自己写教材的方式学习量子力学

工具: Codex CLI + L^AT_EX

方法: 与 AI 交互式对话驱动

- 先讨论概念，再写入教材
- 保留完整推导，实时编译检查
- 遇到困惑即时追问

记录: CLI History Manager 全程录制

- 284 个有效交互轮次
- 4 个主要会话
- 跨越 8 天 (3/13 – 3/20)

产出物

类型	数量
教材章节	11 章
专题笔记	3 篇
文件总数	67 个
文件修改	940+ 次

教材章节

Ch0 前言 Ch1 数学准备
Ch2 量子起源 Ch3 双缝实验
Ch4 薛定谔方程 Ch5 一维定态
Ch6 谐振子 Ch7 角动量自旋
Ch8 微扰论 Ch9 全同粒子
Ch10 开放系统与退相干

目录

前言	iv
第一章 数学准备: 态、内积与算符	1
1.1 态与希尔伯特空间	2
1.2 bra-ket 记号与内积	12
1.3 线性叠加与基底展开	13
1.4 实际计算时如何选取坐标表示	15
1.5 算符、本征态与测量	20
1.6 谱分析基础	23
1.7 谱分解与测量公设	38
1.8 张量积与复合系统	41
1.9 与后文的关系	50
第二章 量子概念的历史起源	51
2.1 经典物理的成功与危机	51

目录	ii
4.2 孤立系统的时间演化与么正算符	65
4.3 从么正演化到薛定谔方程	66
4.4 时间无关哈密顿量、能量本征态与定态	68
4.5 位置表象中的薛定谔方程	70
4.6 讨论: 这章并没有引入新的测量公设	71
4.7 小结	72
第五章 一维定态问题与势阱模型	73
5.1 从抽象动力学到具体模型	73
5.2 时间无关薛定谔方程与边界条件	74
5.3 无限深势阱: 边界条件导致的能量量子化	75
5.4 有限深势阱: 束缚态与穿透尾部	78
5.5 矩形势垒与隧穿效应	80
5.6 小结	82
第六章 谐振子	83
6.1 为什么谐振子会反复出现	83
6.2 升降算符与哈密顿量的因子分解	84
6.3 谱结构、基态与零点能	86
6.4 位置表象中的波函数与 Hermite 结构	88
6.5 密度算符、定态与热态	89
6.6 小结	91
第七章 角动量与自旋	92

第一章 数学准备: 态、内积与算符

在正式进入量子力学之前, 需要先约定几种会反复出现的数学对象。这里的目标不是系统讲授泛函分析或抽象线性代数, 而是把后文立刻会用到的记号和概念先建立起来。读这一章时, 最重要的不是一次记住所有术语, 而是先接受一个基本转变: 在量子力学中, 系统的基本描述对象不再是经典轨迹, 而是一个量子态。若追求最严格而统一的表述, 这个“态”应理解为密度算符; 而后面频繁出现的 ket, 则只是在纯态情形下使用的方便代表元。

为了避免不同类型的符号混在一起, 先给出一个最常用的速查表。这个表并不穷尽后文所有记号, 但足以覆盖本章最容易混淆的对象类型。

符号	对象类型	含义
x, p	实变量 / 实数标签	位置、动量的取值标签; 在表象中常用来标记连续基底
\hbar	实常数	约化普朗克常数, $\hbar = h/(2\pi)$
i	复数常数	虚数单位, 满足 $i^2 = -1$

1.1 态与希尔伯特空间

量子力学中的态虽然最终要统一写成定义在某个 Hilbert 空间上的密度算符, 但这些密度算符本身仍作用在一个底层的 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上; 纯态的代表元、bra-ket 记号、表象展开、算符作用也都要在这个空间里定义。因此, 进入密度算符语言之前, 仍然必须先把 Hilbert 空间本身说清楚。希尔伯特空间通常记作 \mathcal{H} 。从直观上看, 它可以先被理解为一个带有内积的复向量空间; 从更严格的数学定义看, 它还要求对这个内积诱导出的范数是完备的。对于初学阶段来说, 先把它理解成“允许做线性叠加、允许定义长度和夹角的复向量空间”就已经足够。这里先说明一个记号约定: 复内积的线性位置在文献中有两种常见选择。数学文献常取“对第一个变量线性、对第二个变量共轭线性”; 而本文为了和 Dirac 记号保持一致, 采用物理学中更常见的约定, 即“对右边的 ket 线性、对左边的 bra 共轭线性”。

定义 1.1. 在本文采用的物理学约定下, 复希尔伯特空间是一个复向量空间 \mathcal{H} , 其上给定一个内积

$$\langle \phi | \psi \rangle,$$

满足下列性质: 对任意 $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}$ 与任意 $a, b \in \mathbb{C}$, 有

$$\langle \phi | a\psi + b\chi \rangle = a \langle \phi | \psi \rangle + b \langle \phi | \chi \rangle,$$

$$\langle a\phi + b\chi | \psi \rangle = a^* \langle \phi | \psi \rangle + b^* \langle \chi | \psi \rangle,$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*, \quad \langle \psi | \psi \rangle \geq 0,$$

且 $\langle \phi | \phi \rangle = 0$ 当日仅当 $\phi = 0$ 。由内积定义的范数

产出展示 (3/7): 定理证明 (p.25) 与散文叙述 (p.55)

这说明, 选择基底并不是随意的记号游戏, 而是在根据问题的结构挑选最合适的“坐标系”。讨论测量时, 常选可观测量的本征态基底; 讨论空间传播时, 常选位置或动量表象; 讨论定态和时间演化时, 常选哈密顿量本征态基底。

因此, 当我们说“纯态代表元在实际计算时有具体函数形式吗”, 更准确的说法应当是: 向量在某个表象下可以表示成具体的坐标对象。这个对象有时是有限维列向量, 有时是一维或多维复值函数, 有时则是一串展开系数。抽象向量本身并没有变, 变的是我们用来描述它的坐标系。

1.5 算符、本征态与测量

量子力学中的物理量不是用普通函数表示, 而是用作用在态空间上的线性算符表示。算符通常记作带帽符号, 例如 \hat{A} 、 \hat{H} 、 \hat{X} 、 \hat{P} 。线性意味着

$$\hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha\hat{A}|\psi\rangle + \beta\hat{A}|\phi\rangle.$$

这里要把“算符”和“泛函”分清楚。线性算符是从 \mathcal{H} 到 \mathcal{H} (或另一个向量空间) 的线性映射; 线性泛函则是从 \mathcal{H} 到复数域 \mathbb{C} 的线性映射。前面出现的 $\langle\phi|$ 属于后者, 而这里的 \hat{A} 属于前者。它把一个态变成另一个态, 而不是直接输出一个复数。

定义 1.6. 设 $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间上的线性算符。若存在常数 $C \geq 0$, 使得对任意 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 都有

$$\|\hat{A}\psi\| \leq C\|\psi\|,$$

则称 \hat{A} 为有界线性算符。最小的这类常数记作

于是

$$\rho_{AB} = |\psi_A \otimes \psi_B\rangle \langle \psi_A \otimes \psi_B|.$$

由于纯态代表元只差整体相位, 因此可取

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

这就完成了证明。 □

例 1.10 (Bell 态). 令

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle), \quad \rho_{AB} = |\Psi\rangle \langle \Psi|.$$

我们来证明这个纯态是纠缠态。若它可分, 则由上一个命题, $|\Psi\rangle$ 必可写成

$$|\Psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle).$$

展开右边可得

$$|\Psi\rangle = ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle.$$

与原式逐项比较可知

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0.$$

由于 $ac \neq 0$ 与 $bd \neq 0$, 可知

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0,$$

但这又与 $ad = 0$ 和 $bc = 0$ 矛盾。因此 $|\Psi\rangle$ 不能分解成单一乘积形式, 从而对应的纯态不是可分态, 而是纠缠态。

产出展示 (4/7): TikZ 示意图 (p.58)

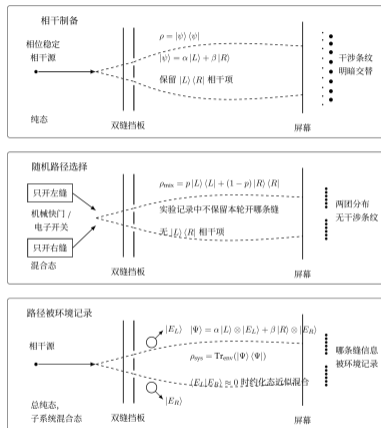


图 3.1: 双缝实验中纯态与混合态的三种典型实验情形。上图是相位稳定的相干源直接制备路径叠加纯态; 中图是在实验轮次之间随机只开一条缝, 因此得到经典概率混合; 下图是在双缝附近加入探测器或环境标签, 此时总系统仍可保持纯态, 但对对象子系统的约化态变为混合态。

图 3.1
 三种典型实验情形:
上 相干制备
 纯态
中 随机路径
 混合态
下 环境标记
 退相干



纯态与纠缠态

这份说明文档只讨论一个很具体的问题: 为什么一个态向量明明总可以写成某组基底的线性组合, 却仍然可能是“不可分”的; 以及, “纯态”和“纠缠态”到底分别在说什么。初学时最容易混淆的是两种完全不同的分解: 一种是普通线性代数中的基底展开, 另一种是张量积意义下是否能写成单个乘积。后者才是纠缠问题真正关心的对象。

1 两个不同的分解问题

设总系统的状态空间是

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

一旦在 \mathcal{H}_A 与 \mathcal{H}_B 中分别选定基底 $\{|i\rangle_A\}$ 与 $\{|\mu\rangle_B\}$, 任意总态 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ 都可以写成

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu} c_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B.$$

这只是普通的基底展开。它所表达的意思是: $|\Psi\rangle$ 在乘积基底下一组坐标 $c_{i\mu}$ 。从这个角度看, 任何向量都能写成很多项之和, 这一点本身并不特殊。

纠缠讨论的则是另一件事。我们关心是否存在某个 $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ 与某个 $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$, 使得

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

2 “态”这个词的三层表述

5

因此

$$\|K\| |x_n\rangle - K |x_n\rangle \rightarrow 0.$$

结合 $K |x_n\rangle \rightarrow |y\rangle$, 可得

$$|x_n\rangle \rightarrow \frac{1}{\|K\|} |y\rangle.$$

记

$$|\phi_1\rangle := \frac{1}{\|K\|} |y\rangle,$$

则 $\|\phi_1\| = 1$, 并且

$$K |\phi_1\rangle = \|K\| |\phi_1\rangle.$$

这说明 $\|K\|$ 是 K 的本征值。

记

$$\mathcal{H}_1 := \{|\phi_1\rangle\}^\perp.$$

由于 K 自伴, \mathcal{H}_1 对 K 不变。事实上, 若 $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$, 则

$$\langle \phi_1 | K u \rangle = \langle K \phi_1 | u \rangle = \|K\| \langle \phi_1 | u \rangle = 0.$$

因此可以把 K 限制到 \mathcal{H}_1 上。若该限制不为零, 就对它重复上面的论证, 得到 $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_1$ 与本征值 $p_2 \geq 0$ 。如此继续下去, 得到一组正交归一的本征向量

$$|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$$

以及对应的非负本征值

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0.$$

若非零本征值有无限多个, 则必有 $p_n \rightarrow 0$ 。否则存在 $\varepsilon > 0$ 与无限多个指标 n 使 $p_n \geq \varepsilon$ 。对不同的 m, n , 有

连续谱的直觉: 稠密但不满、近似本征态与“不稳定的逆”

这份 note 只讨论一个很具体的问题: 为什么在 Hilbert 空间里, 的确可能存在“稠密但并不等于整个空间”的线性子空间; 以及, 为什么连续谱会被定义成

$$\hat{A} - \lambda \hat{I} \text{ 单射、值域稠密但不满射}$$

这样的情形。若只从有限维线性代数的直觉出发, 这个定义看上去会有些别扭, 因为在有限维里, 单射、满射与可逆总是绑在一起, 根本不会冒出“值域稠密但不等于全空间”这一层现象。真正的新情况来自无限维。

1 真稠密子空间为什么会出现

先把最容易卡住的地方说清。对线性子空间 $M \subset \mathcal{H}$ 而言,

$$M = \mathcal{H}$$

表示它作为集合已经完全等于整个空间; 而

$$\overline{M} = \mathcal{H}$$

只表示它的闭包等于整个空间, 也就是说, \mathcal{H} 中每个向量都能被 M 里的向量任意精确地逼近。后

3 为什么这意味着逆算符不稳定

6

接着证明这个定义与逼近序列的选择无关。若另一列 $|y'_n\rangle \in \text{Ran}(T)$ 也满足 $|y'_n\rangle \rightarrow |y\rangle$, 则

$$\|T^{-1}|y_n\rangle - T^{-1}|y'_n\rangle\| \leq C \| |y_n\rangle - |y'_n\rangle \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

因此两列像的极限相同, 所以 $S|y\rangle$ 定义良好。

当 $|y\rangle \in \text{Ran}(T)$ 时, 可直接取常数列 $|y_n\rangle = |y\rangle$, 于是

$$S|y\rangle = T^{-1}|y\rangle.$$

所以 S 确实延拓了 T^{-1} 。

再看线性与有界性。若 $|y\rangle, |z\rangle \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 分别取 $|y_n\rangle \rightarrow |y\rangle, |z_n\rangle \rightarrow |z\rangle$ 且 $|y_n\rangle, |z_n\rangle \in \text{Ran}(T)$, 则

$$\alpha|y_n\rangle + \beta|z_n\rangle \in \text{Ran}(T), \quad \alpha|y_n\rangle + \beta|z_n\rangle \rightarrow \alpha|y\rangle + \beta|z\rangle.$$

由定义和 T^{-1} 的线性性,

$$\begin{aligned} S(\alpha|y\rangle + \beta|z\rangle) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-1}(\alpha|y_n\rangle + \beta|z_n\rangle) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-1}|y_n\rangle + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-1}|z_n\rangle \\ &= \alpha S|y\rangle + \beta S|z\rangle. \end{aligned}$$

故 S 线性。又由

$$\|T^{-1}|y_n\rangle\| \leq C \| |y_n\rangle \|,$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\|S|y\rangle\| \leq C \| |y\rangle \|,$$

所以 S 有界。

唯一性也很直接。若 $S_1, S_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 都是 T^{-1} 的有界延拓, 则 $S_1 - S_2$ 是有界线性算子, 并且在稠密子空间 $\text{Ran}(T)$ 上恒为零。由连续性, 它在整个 \mathcal{H} 上都为零, 因此 $S_1 = S_2$ 。

最后证明

复合系统中的张量积、偏迹与连续谱积分规则

这份 note 只整理复合系统里最常用的一组运算规则。目标不是重新证明张量积的存在性，而是在已经接受

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

作为复合系统态空间之后，把实际计算时最容易反复查找的公式集中写清楚：张量积向量与算符如何展开，局域算符如何作用，偏迹怎样定义与计算，以及在连续谱表象中，求和为什么会变成积分、偏迹为什么会变成“对被消去变量取对角后积分”。

1 张量积的基本代数规则

设 $|\psi_A\rangle, |\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\chi_B\rangle, |\eta_B\rangle \in \mathcal{H}_B$, $a, b \in \mathbb{C}$ 。张量积首先满足对每个变量的线性：

$$(a|\psi_A\rangle + b|\phi_A\rangle) \otimes |\chi_B\rangle = a(|\psi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle) + b(|\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle),$$

$$|\psi_A\rangle \otimes (a|\chi_B\rangle + b|\eta_B\rangle) = a(|\psi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle) + b(|\psi_A\rangle \otimes |\eta_B\rangle).$$

因此，若两边各自都先作叠加，再取张量积，展开后会自然出现交叉项。

张量积空间上的内积由单纯张量上的规则唯一决定：

$$\langle \psi_A \otimes \chi_B | \phi_A \otimes \eta_B \rangle = \langle \psi_A | \phi_A \rangle \langle \chi_B | \eta_B \rangle.$$

3 偏迹的定义与常用公式

8

它不是单个乘积态，但它显然可以写成两个乘积纯态的凸组合，因此是可分态。现在分别对两个子系统做偏迹。为了把过程看得更清楚，直接取 B 系统的正交归一基

$$\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}.$$

由偏迹的基底公式，

$$\text{Tr}_B(|00\rangle\langle 00|) = \sum_{\mu=0,1} (I_A \otimes \langle \mu |_B) |00\rangle\langle 00| (I_A \otimes |\mu\rangle_B).$$

当 $\mu = 0$ 时，

$$(I_A \otimes \langle 0 |_B) |00\rangle = |0\rangle_A, \quad \langle 00| (I_A \otimes |0\rangle_B) = \langle 0|_A,$$

所以这一项给出

$$|0\rangle_A \langle 0|_A.$$

当 $\mu = 1$ 时，

$$(I_A \otimes \langle 1 |_B) |00\rangle = 0,$$

所以这一项为零。于是

$$\text{Tr}_B(|00\rangle\langle 00|) = |0\rangle\langle 0|,$$

同理，

$$\text{Tr}_B(|11\rangle\langle 11|) = \sum_{\mu=0,1} (I_A \otimes \langle \mu |_B) |11\rangle\langle 11| (I_A \otimes |\mu\rangle_B).$$

这时只有 $\mu = 1$ 那一项留下，并给出

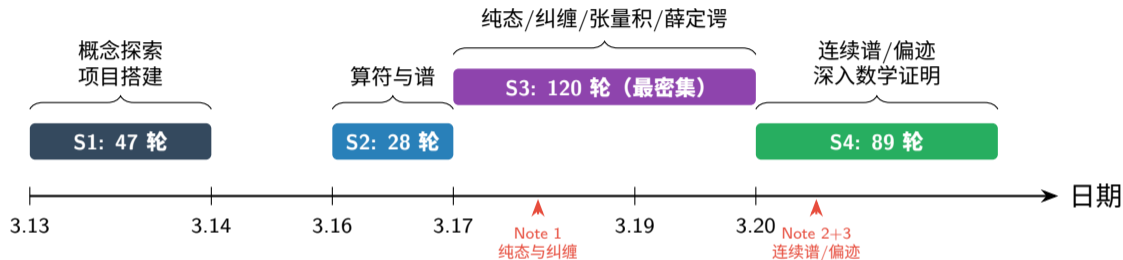
$$\text{Tr}_B(|11\rangle\langle 11|) = |1\rangle\langle 1|.$$

因此

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}^1) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I_A.$$

□

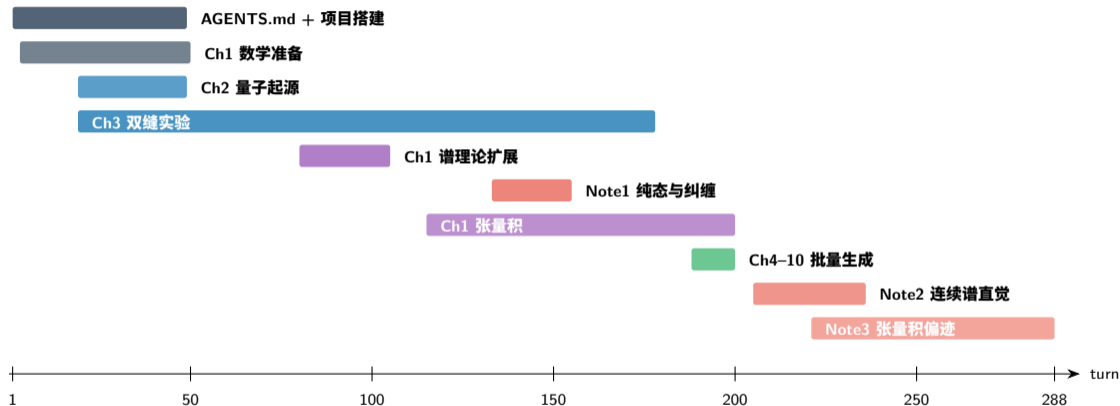
会话时间线



节奏特征

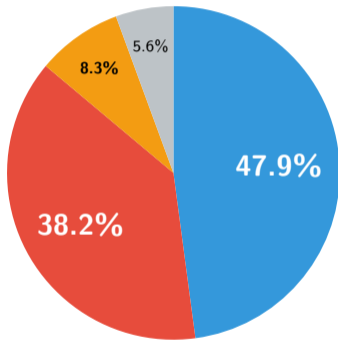
每轮平均耗时 ~ 78 秒 · 平均每轮修改 3.3 个文件 · 核心文件 `01-math-preliminaries.tex` 修改 55 次跨 4 个会话

章节演化节奏



特点: Ch1 数学准备贯穿始终 (55 次修改), 每学到新物理概念就回补数学基础。
Ch3 双缝实验是讨论时间最长的物理章节 (turn 9 – turn 178)。





类型	次数	说明
概念讨论	138	提问、追问、澄清
内容编写	110	“你补进去”“你写一下”
调试修复	24	编译错误、排版调整
其他	16	空操作/文档/未分类

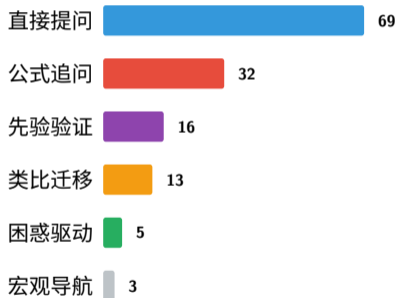
核心发现

讨论 > 写作：近半数交互是纯粹的概念讨论，体现了“先理解再动手”的学习策略。



概念讨论的细分模式

138 次概念讨论按提问方式分类



■ **直接提问 50%** “什么是 X”、“为什么 Y”

例：“算符的 trace 是怎么定义的”

■ **公式追问 23%** 对推导步骤逐行追问

例：“第一个等式是结论，第二个等式是怎么来的”

■ **先验验证 12%** 先给出理解，求确认/纠正

例：“所以说纯态就是一维 Hilbert 空间吗”

■ **类比迁移 9%** 用概率论/泛函分析类比

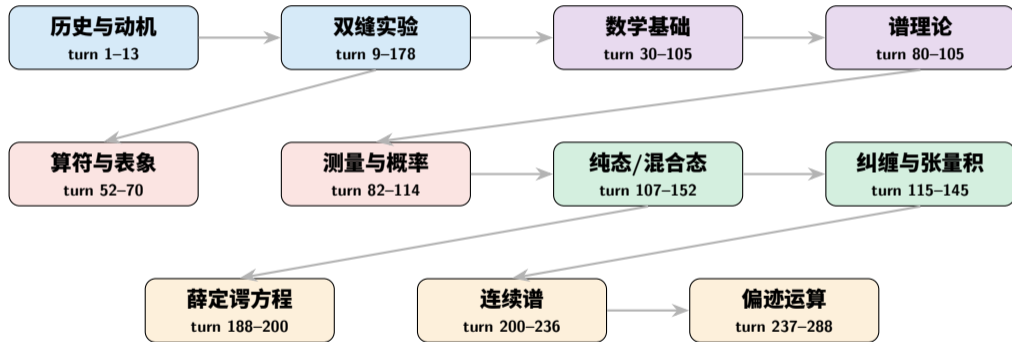
例：“干涉是一个条件分布是不是，可不可区分当作先验”

■ **困惑驱动 4%** 表达困惑，触发深度讨论链

例：“我对纯态的概念感到困惑，怎么会有不可分的向量”

先验验证和类比迁移合计 21%，反映了用户始终在用已有知识框架主动同化新概念，而非被动接受。

知识内容分类



案例 1 (上): 文风重塑 — Turn 19 初稿

Turn 19 · “从这里开始, 你开始使用 \LaTeX 进行叙述” · 创建 Ch2 + Ch3 (共 443 行)

Turn 19 生成的内容 (列表风格)

2.1 实验困境 2.2 普朗克的做法

2.3 这一事件改变了什么认知

- ① 能量交换并不一定是连续流动的。
- ② 常数 h 提示微观世界存在新尺度。

2.4 光电效应 2.4.1 实验现象

- ① 存在截止频率 ν_0 ...
- ② 光电子动能与光强度无关...

问题

大量 enumerate、subsection 碎片化, 像课件大纲, 不像教科书。

Prompt #20

“文风不太对, 太多 list, 不像教科书”

Prompt #21

“分 list 太多了”

案例 1 (下): 文风重塑 — Turn 20 改稿

同一内容经重写后的效果: 222 行 → 85 行, 列表全部消除

Turn 20 重写后 (散文风格)

量子思想的第一个突破口来自黑体辐射问题。所谓黑体, 是一种理想化系统...

普朗克在 1900 年提出了极不符合经典直觉的假设: 振子只能以 $E = nh\nu$ 的离散份额吸收和释放能量。这个公式的成功已经表明: **微观过程中的能量交换方式, 可能根本不是经典理论所设想的连续流动。**

变化对比

	改前	改后
Ch2 行数	222	85
Ch3 行数	221	85
enumerate	12 处	0 处
subsection	18 个	6 个

Prompt #22 (固化风格)

“文风可以了, 写到 AGENTS.md 里”
⇒ 新增“正文文风”规范:
用连续段落推进论证。

案例 2：内积约定纠正 — Turn 42

用户发现共轭线性位置错误 → 修正并补充约定说明

Prompt #42

“复数共轭好像有点奇怪，一般内积里面是前向量提出原始标量，后向量提出共轭标量吧”

修改前 (Ch1 · 数学准备)

内积满足： $\langle \alpha\phi|\psi\rangle = \alpha\langle\phi|\psi\rangle$

(未说明约定选择，且线性位置与物理惯例不一致)

修改后

复内积的线性位置在文献中有两种常见选择。数学文献常取“对第一个变量线性”；**本文采用物理学中更常见的约定**，即

对右边的 ket 线性： $\langle\phi|\alpha\psi\rangle = \alpha\langle\phi|\psi\rangle$

对左边的 bra 共轭线性： $\langle\alpha\phi|\psi\rangle = \bar{\alpha}\langle\phi|\psi\rangle$

意义

用户用泛函分析知识发现约定冲突。此后教材在**每个约定选择处**都明确标注“物理约定”或“数学约定”。

案例 3：光子概念的循环性追问

Turn 9-13 · 连续 5 轮纯讨论 · 零文件变更

Prompt 链

#9 “我不太理解什么叫发射一个光子，实验上是怎么做的”

#10 “光子概念不是建立在量子力学基础之上吗，没有量子力学怎么有光子”

#11 “实验初期并没有严格化成单光子，实际上就是弱光源...是这个意思吗”

#13 “逻辑上是先假设光子，再看现象是否符合单光子假设下的演绎”

分析

体现了“概念循环性”的洞察：光子概念依赖量子理论，但双缝实验被用来论证量子理论。通过连续追问厘清了 **弱光源** → **统计验证** → **概念确立** 的历史逻辑。



案例 4：概率直觉的碰撞

Turn 16-18 · 用贝叶斯框架理解量子干涉 → 发现经典概率失效

Prompt 链

#16 “干涉是一个条件分布是不是，可不可区分当作先验，干涉状态就是后验分布”

#17 “全概率公式在量子力学里面不一定任何时候都适用是不是”

#18 “概率幅是一个什么概念，在概率论中有对应的概率吗”

经典概率（全概率公式）

$$P(x) = P(x|L) P(L) + P(x|R) P(R)$$

路径概率直接相加 → 无干涉条纹

量子概率（概率幅叠加）

$$P(x) = |A_L(x) + A_R(x)|^2 \neq |A_L|^2 + |A_R|^2$$

交叉项 $2\text{Re}(A_L^* A_R)$ 产生干涉条纹

⇒ 这一碰撞促使教材在 Ch3 中加入了经典 vs 量子概率对比的详细讨论。

案例 5：“态”的概念突破 — 追问链

Turn 132-145 · 14 轮密集讨论

追问链

#132 “纯态的概念感到困惑，怎么会有不可分的向量”

#135 “纯态就是一维希尔伯特空间吗”

#138 “任何向量张成的一维子空间不就叫纯态吗”

#139 “什么叫不是纯态的态呢”

#140 “态到底是指向量还是指子空间”

#142 “态这个词指密度算符是最严谨的”

概念突破路径

向量 \rightarrow 射线（一维子空间） \rightarrow 密度算符

最终确立：**态** \equiv **密度算符**

● 纯态 $\Leftrightarrow \rho^2 = \rho$ （秩一投影）

● 混合态 $\Leftrightarrow \rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

讨论链直接催生了 Prompt #133:

“你先在 notes/ 文件夹下面给我写一个文档，专门阐释什么是纯态什么是纠缠态”

案例 5 续：讨论催生的笔记内容

Turn 133-134 · 创建 notes/pure-states-and-entanglement.tex (226 行)

生成的核心内容

1. 基底展开 \neq 可分性

“写成基的线性组合”与“能否写成 $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ ”是**完全不同的问题**。

2. 系数矩阵判据

可分 $\Leftrightarrow C_{i\mu} = a_i b_\mu$ (矩阵秩 = 1)。

3. Bell 态不可分

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, 若可分则 $ac, bd \neq 0$ 但 $ad = bc = 0$, 矛盾。

从.md 到.tex

Turn 133 生成 Markdown \rightarrow

Prompt #134: “也要使用 latex 编译”

\rightarrow Turn 134 重建为 \LaTeX 文档, 带定理环境和交叉引用。

后续追问 (Turn 148)

“谱分解不能默认写成离散求和, 密度算符之所以可以, 是因为...”

\Rightarrow 要求展开紧正算符谱定理的完整证明。



案例 5 附：三篇笔记的诞生模式

Note 1: 纯态与纠缠 (14 页)

#132 “纯态概念感到困惑” → #133 “在 notes/ 下写文档阐释纯态和纠缠态” → #134 “要用 latex 编译” → #135-152 持续追问密度算符

Note 2: 连续谱直觉 (13 页)

#203 “存在稠密但不充满全空间的子空间吗” → #205 “把直觉内容写到新 note” → #206-236 追加正交分解定理、投影值测度

Note 3: 张量积与偏迹 (16 页)

#220 “ket 怎么确定 bra” → #221 “单独开 note 写 \otimes 运算法则和偏迹” → #222-288 补充偏迹公式、Bell 态计算

共同模式

正文讨论遇到困惑 → 主动要求“开一个 note” → 在 note 中持续深入。三篇 note 均非预先规划，而是学习过程中自然涌现。

案例 6: Ch3 双缝实验的数学语言升级

Turn 158 · “让第三章的叙述风格更贴近我们在第一章构建的数学语言基础”

修改前 (朴素记号)

$$P(x) = |A_L(x) + A_R(x)|^2$$

⇒

修改后 (密度算符 + 谱测度)

$$\mathbb{P}_\rho(x \in \Delta) = \text{Tr}(\rho E_{\hat{X}}(\Delta))$$

新增的数学工具: 概率密度 $\rho_\rho(x) = |\psi(x)|^2$, 约化态 $\rho_{\text{sys}} = \text{Tr}_{\text{env}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$

意义

同一物理内容 (双缝实验), 用 Ch1 的数学工具重新表述 — “学到新数学就回来重写物理”。



案例 7: TikZ 示意图的 6 轮迭代

Turn 170-175 · 纯态 vs 混合态的双缝实验对比图

Prompt #170

“你能不能结合具体的实验手法或者画一个对比示意图表明什么时候可以认为是纯态，什么时候可以认为是混合态，画图的时候画的精美一点，风格就是那种黑白的就行了”

6 轮迭代过程

#170 首版：三面板水平排列

#171 “没看见双缝，更写实，竖着放”

#172 “文字挤一起了，画大一点”

#173 “高度再拉大，文字有重合”

#174 “XX 态字样放在左下角”

#175 “怎么没有 \otimes ”

最终三面板内容

面板 1 — 纯态

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, |\psi\rangle = \alpha|L\rangle + \beta|R\rangle$$

面板 2 — 混合态

$$\rho_{\text{mix}} = p|L\rangle\langle L| + (1-p)|R\rangle\langle R|$$

面板 3 — 退相干

$$|\Psi\rangle = \alpha|L\rangle \otimes |E_L\rangle + \beta|R\rangle \otimes |E_R\rangle$$

$$\rho_{\text{sys}} = \text{Tr}_{\text{env}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$$

案例 8：从物理直觉到数学严格化

Turn 200–207 · 稠密性、正交分解定理的完整证明

触发 Prompt

#200 “命题 1.8 里面说 ‘若值域不稠密，则存在非零向量与该值域正交’，推断和稠密有什么关系”

#203 “存在稠密但是不充满全空间的线性子空间吗”

Turn 206 命题与证明

命题 若 $\text{Ran}(T)$ 在 \mathcal{H} 中不稠密，则

$\text{Ran}(T)^\perp \neq \{0\}$ 。

证明 取闭包 $\overline{\text{Ran}(T)}$ 。若 $\text{Ran}(T)$ 不稠密，则

$\text{Ran}(T) \subsetneq \overline{\text{Ran}(T)}$ 。由正交分解定理

$\mathcal{H} = \overline{\text{Ran}(T)} \oplus \overline{\text{Ran}(T)}^\perp$ ，因而

$\overline{\text{Ran}(T)}^\perp \neq \{0\}$ 。又 $\text{Ran}(T) \subseteq \overline{\text{Ran}(T)}$ 蕴涵

$\overline{\text{Ran}(T)}^\perp \subseteq \text{Ran}(T)^\perp$ 。□

Turn 207 正交分解定理

定理 设 M 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的闭子空间，则
 $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ 。

存在性 令 $d = \inf_{|u\rangle \in M} \|x - u\|$ ，取极小化序列 $|u_k\rangle$ 。由平行四边形恒等式证明 $\{u_k\}$ 为 Cauchy 列，极限 $|m\rangle \in M$ ， $\|x - m\| = d$ 。令

$|n\rangle = |x\rangle - |m\rangle$ ，取 $z = \frac{\langle v|n\rangle}{\|v\|^2}$ 证明 $\langle v|n\rangle = 0$ 。

唯一性 $M \cap M^\perp = \{0\}$ 。□

⇒ Prompt #207: “正交分解定理也表述一下并证明” — 一个追问引发完整的定理证明链。



案例 8 续：有界逆延拓与连续谱本质

同一讨论链中生成的第二个关键命题

Turn 206 第二个命题

命题 若 T 单射且 $\text{Ran}(T)$ 在 \mathcal{H} 中稠密, T^{-1} 在 $\text{Ran}(T)$ 上有界 ($\|T^{-1}u\| \leq C\|u\|$), 则 T^{-1} 可唯一地连续延拓为 $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, 满足 $TS = I$ 。

证明要点: 取 $y_n \in \text{Ran}(T)$, $y_n \rightarrow y_0$ 。由有界性 $\|T^{-1}y_m - T^{-1}y_n\| \leq C\|y_m - y_n\|$, 故 $\{T^{-1}y_n\}$ 为 Cauchy 列。定义 $S|y\rangle = \lim T^{-1}|y_n\rangle$ 。验证良定义性、线性、有界性 ($\|S|y\rangle\| \leq C\|y\rangle$) 和 $TS = I$ (由 T 的连续性)。

与连续谱的联系

推论: T 单射 + 值域稠密 + T^{-1} 有界 $\Rightarrow T$ 必满射 $\Rightarrow \lambda$ 不在谱中。

逆否: 若 λ 属于连续谱 ($T = A - \lambda I$ 单射且值域稠密但 **不可逆**), 则 T^{-1} 必须**无界** — 这就是连续谱的数学本质。

案例 9：偏迹运算 — 从困惑到完整推导

Turn 237-264 · 每一步“因此”都要求展开

追问链（节选）

#246 “态就是密度算符的别称吗”

#248 “ $I_A \otimes \langle \mu |_B$ 单独看的含义是什么”

#253 “第二个等式是怎么来的”

#257 “这是为什么”

#260 “怎么证明满足结合律”

#263 “ $\text{Tr}_B(|00\rangle\langle 00|) = |0\rangle\langle 0|$ 为什么”

#265 “ $|0\rangle\langle 0|$ 和 $|1\rangle\langle 1|$ 的乘积是啥”

推导内容（节选）

偏迹基底公式：

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu} \langle i, \mu | \rho_{AB} | j, \mu \rangle$$

Turn 258 证明 $\text{Tr}_B(\rho_A \otimes \rho_B) = \rho_A \text{Tr}(\rho_B)$ ：

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} (I_A \otimes \langle \mu |_B) (\rho_A \otimes \rho_B) (I_A \otimes | \mu \rangle_B) \\ &= \sum_{\mu} \rho_A \langle \mu | \rho_B | \mu \rangle = \rho_A \text{Tr}(\rho_B) \end{aligned}$$

学习模式

对每一个“因此”逐一追问 — 最终在 notes 中积累了完整的偏迹运算推导链（32 页）。

已掌握 / 可以深入提问的知识图谱

Hilbert 空间

Dirac 记号

内积与对偶

Riesz 定理

已掌握

自伴算符

位置/动量算符

谱分解

本征态/本征值

深入中

概率幅 vs 概率

Born 法则

密度算符

纯态 vs 混合态

待展开

张量积构造

纠缠态

偏迹运算

连续谱算符

投影值测度

傅里叶/酉变换

薛定谔方程

一维定态问题

谐振子

角动量与自旋

微扰论

量子计算



已能提出深度问题的领域

- **概率基础**: 辨析量子概率与经典概率的本质区别
- **态的层次**: 向量 \rightarrow 射线 \rightarrow 密度算符的完整链
- **谱理论**: 点谱/连续谱/剩余谱, 乘法算子实例
- **张量积**: 代数构造 (泛性质)、完备化、可分性
- **表象理论**: 位置/动量切换, 傅里叶变换

学习策略特征

- ① **追问到底**: 对“因此”“由此可得”要求展开证明
- ② **概念回溯**: 遇到新概念立即回到数学定义
- ③ **类比迁移**: 用概率论、泛函分析理解量子力学
- ④ **具象化**: 要求具体计算实例
- ⑤ **风格把控**: 主动控制叙述风格和排版

Examples

Turn 196: “我们离量子计算还有多远” — 始终关注最终目标

过程特征

- 8 天 284 轮有效交互
- “讨论先行”：48% 概念讨论 + 38% 内容编写
- 数学准备章节贯穿始终（55 次修改）
- 3 篇独立 notes 从讨论中自然涌现
- 从“我完全不清楚”到追问投影值测度和广义本征态

方法论启示

- AI 辅助学习的核心不在于“获取答案”，而在于**通过追问构建理解**
- “写教材”模式迫使知识必须严格化、体系化
- 完整的交互记录使学习过程本身成为可分析的数据

下一步

完善 Ch4–Ch10 的详细内容，向量子计算方向推进。

谢谢

量子力学学习仍在继续...

284 turns and counting

